Intégrales impropres

Table des matières

Nous avons vu au chapitre "*Intégration sur un segment*" que toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est intégrable sur ce segment. Dans ce chapitre, nous étudions le cas où la fonction n'est pas définie en b (ou en a).

1 Intégration sur un intervalle semi-ouvert

1.1 Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert

Définition 1.1 : *Intégrale impropre en b*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Si f est continue sur $[a, b[$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ **converge** lorsque $\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ **diverge**.

Lorsqu'on intègre sur un intervalle $[a, b[$, on dit que l'intégrale est impropre en b.

Exemple 1. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

Solution.

Exemple 2. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$.

Solution.

Exemple 3. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$.

Solution.

Définition 1.2 : *Intégrale impropre en a*

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si f est continue sur $]a, b]$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ **converge** lorsque $\int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers a^+. Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ **diverge**.

Lorsqu'on intègre sur un intervalle $]a, b]$, on dit que l'intégrale est impropre en a.

Exemple 4. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,dt$.

Solution.

Exemple 5. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$.

Solution.

1.2 Intégrales de référence

1.2.1 Intégrale de Riemann

Proposition 1.3 : *Intégrale de Riemann*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge $\quad\Leftrightarrow\quad \alpha > 1.$ $\quad$ Dans ce cas, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha - 1}.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge $\quad\Leftrightarrow\quad \alpha < 1.$ $\quad$ Dans ce cas, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1 - \alpha}.$

Les résultats de convergence restent vrais pour les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ avec $a > 0$ ou $\displaystyle\int_0^{b} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ avec $b > 0$.

Démonstration. (i) L'intégrale est impropre en $+\infty$. On a déjà prouvé que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ divergeait. Si $\alpha \neq 1$, pour $x \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=1}^x = \frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

On en déduit que l'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(ii) L'intégrale est impropre en 0. On a déjà prouvé que $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t}\,dt$ divergeait. Si $\alpha \neq 1$, pour $x \in]0, 1]$,

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=x}^1 = \frac{1}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha > 1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

On en déduit que l'intégrale converge si et seulement si $\alpha < 1$.

$\square$

On peut remarquer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est toujours divergente.

Corollaire 1.4 : *Intégrales de Riemann translatées*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a < b$ des réels.

$$\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt \text{ et } \int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt \text{ convergent} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha < 1.$$

Démonstration. On montre le résultat pour la première intégrale, la deuxième se fait de manière similaire. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est continue sur $[a, b[$, donc l'intégrale est impropre en b. Soit $x \in [a, b[$. Par changement de variable $u = b - t$,

$$\int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt = \int_{b-a}^{b-x} \frac{1}{u^\alpha}\,(-du) = \int_{b-x}^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}\,du$$

La convergence ou divergence de l'intégrale lorsque x tend vers b est alors assurée par le résultat précédent sur les intégrales de Riemann impropres en 0. $\square$

Exemple 6. *L'intégrale* $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5-t}}\,dt$ *converge et l'intégrale* $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(t-1)^2}\,dt$ *diverge.*

1.2.2 Intégrale d'une fonction exponentielle

Proposition 1.5 : *Intégrale d'une fonction exponentielle*

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > 0. \qquad \text{Dans ce cas, } \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration. L'intégrale est impropre en $+\infty$. On distingue deux cas.

- Si $\lambda = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda \neq 0$,

$$\int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_{t=0}^{x} = \frac{1-e^{-\lambda x}}{\lambda} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}, & \text{si } \lambda > 0, \\ +\infty, & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

On en déduit que l'intégrale converge si et seulement si $\lambda > 0$. □

1.3 Cas des fonctions prolongeables par continuité

Si f est prolongeable par continuité en b, son prolongement par continuité est continue sur $[a, b]$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ n'est donc pas impropre en b : c'est l'intégrale classique d'une fonction continue sur un segment.

Proposition 1.6 : *Cas des fonctions prolongeables par continuité en b*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité en b, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Proposition 1.7 : *Cas des fonctions prolongeables par continuité en a*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Si f est une fonction continue sur $]a, b]$ et prolongeable par continuité en a, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt.$$

Exemple 7. *Montrer que l'intégrale* $\int_0^1 t\ln(t)\,dt$ *converge et calculer sa valeur.*

Solution.

1.4 Règles de calcul sur les intégrales convergentes

Les propriétés suivantes sont données pour des intégrales impropres en b, les propriétés pour des intégrales impropres en a sont similaires.

Propriété 1.8 : *Relation de Chasles*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b[$ telle que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, alors pour $c \in [a, b[$:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Propriété 1.9 : *Linéarité de l'intégrale*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$ telles que $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, alors pour tous réels λ et μ,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\ dt \text{ converge.}$$

De plus,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\ dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$$

Propriété 1.10 : *Positivité de l'intégrale*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b[$ telle que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$$

De plus,

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [a, b[,\ f(t) = 0.$$

Propriété 1.11 : *Croissance de l'intégrale*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, alors

$$f(t) \leq g(t)\ \forall t \in [a, b[\quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

Les démonstrations de ces propriétés s'obtiennent par passage à la limite après application de la propriété correspondante sur un segment où les fonctions sont continues.

2 Techniques de calcul

2.1 Intégration par parties

On ne procède pas à une intégration par parties directement dans une intégrale impropre. On se ramène à une intégrale définie sur un segment et on effectue ensuite un passage à la limite.

Méthode 2.1 : *Intégration par parties pour une intégrale impropre*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit f est une fonction continue sur $[a, b[$, $\int_a^b f(t)\,dt$ est impropre en b. Soit $x \in [a, b[$, on effectue l'intégration par parties sur $\int_a^x f(t)\,dt$, cette intégrale est définie sur un segment. Une fois l'intégration par parties réalisée, on fait tendre x vers b.

La méthode d'intégration par parties pour une intégrale impropre en a est similaire.

Exemple 8. *Déterminons la nature de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt$.

Comme $t \mapsto t^2 e^{-t^2}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$, *l'intégrale est impropre en* $+\infty$. *Soit* $x \in [0, +\infty[$, *on pose pour* $t \in [0, x]$,

$$u(t) = t \qquad \textit{et} \qquad v(t) = -\frac{1}{2}\, e^{-t^2}$$

ainsi comme u *et* v *sont de classe* C^1 *sur* $[0, x]$

$$u'(t) = 1 \qquad \textit{et} \qquad v'(t) = t\, e^{-t^2}$$

on obtient donc par intégration par parties et par croissance comparée

$$\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{t}{2}\, e^{-t^2}\right]_{t=0}^{x} + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = -\frac{x}{2}\, e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

De plus, nous verrons que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ *converge et vaut* $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *On en déduit que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt$ *converge et vaut* $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Exemple 9. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt$.

Solution.

2.2 Changement de variable

Théorème 2.2 : *Changement de variable pour une intégrale impropre*

Soit ψ une fonction de classe C^1 et strictement monotone sur $]\alpha, \beta[$. Notons

$$a = \lim_{t \to \alpha^+} \psi(t) \quad \text{et} \quad b = \lim_{t \to \beta^-} \psi(t).$$

Soit f est une fonction continue sur $]a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt$ sont de même nature. En cas de convergence,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du chapitre Intégration sur un segment. On se ramène à une intégrale définie sur un segment, on effectue le changement de variable sur cette intégrale (voir chapitre Intégration sur un segment) et on passe ensuite à la limite. □

Comme ψ est une fonction continue et strictement monotone, d'après le théorème de la bijection monotone, ψ est bijective de $]\alpha, \beta[$ dans $]a, b[$. Comme dans le cas d'une intégrale sur un segment, suivant les situations, il faudra considérer le changement de variable suivant

- soit l'ancienne variable en fonction de la nouvelle.
- soit la nouvelle variable en fonction de l'ancienne.

Méthode 2.3 : *Situation : ancienne variable en fonction de la nouvelle*

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$, on commence par déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est impropre. Si ce n'est pas le cas, on est dans le cas d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment (voir chapitre Intégration sur un segment).
Si c'est le cas, on pose : $x = \psi(t)$ avec ψ de classe C^1 et strictement monotone de $]\alpha, \beta[$ dans $]a, b[$.

(i) (Changement de variable)

$$x = \psi(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \psi^{-1}(x)$$

Le calcul de ψ^{-1} n'est pas toujours nécessaire et n'est utile que pour l'obtention des nouvelles bornes.

(ii) (Elément différentiel)

$$dx = \psi'(t)\,dt$$

(iii) (Nouvelles bornes) Notons

$$\alpha = \lim_{x \to a^+} \psi^{-1}(x) \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{x \to b^-} \psi^{-1}(x).$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer)

$$f(x) = f(\psi(t))$$

(v) (Conclusion) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt$ sont de même nature. En cas de convergence,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt$$

Exemple 10. *Déterminons la nature de* $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\,(1-\ln(x))^2}\,dx$ *avec le changement de variable* $x = e^{1-t}$.
Soit f *définie sur* $[1, e[$ *par*

$$f(x) = \frac{1}{x\,(1-\ln(x))^2}.$$

La fonction f *est continue sur* $[1, e[$ *en tant que quotient bien défini de fonctions continues, l'intégrale est impropre en* e. *On pose :* $x = e^{1-t} = \psi(t)$ *avec* ψ *de classe* C^1 *et strictement décroissante de* $]0, 1]$ *dans* $[1, e[$.

(i) (Changement de variable)

$$x = e^{1-t} \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 - \ln(x)$$

(ii) (Elément différentiel)

$$dx = -e^{1-t}\,dt$$

(iii) (Nouvelles bornes)

$$\alpha = \lim_{x\to 1^+} 1 - \ln(x) = 1 \qquad \textit{et} \qquad \beta = \lim_{x\to e^-} 1 - \ln(x) = 0.$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer)

$$f(x) = \frac{1}{x\,(1-\ln(x))^2} = \frac{1}{e^{1-t}\,t^2} = \frac{e^{t-1}}{t^2} = f\,(\psi(t))$$

(v) (Conclusion) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\,(1-\ln(x))^2}\,dx$ *et* $\displaystyle\int_1^0 \frac{e^{t-1}}{t^2}\left(-e^{1-t}\right)dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ *sont de même nature. D'après le critère de Riemann en* 0, *cette dernière intégrale diverge. On en conclut que* $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\,(1-\ln(t))^2}\,dt$ *diverge.*

Méthode 2.4 : *Situation : nouvelle variable en fonction de l'ancienne (cas simple)*

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$, on commence par déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est impropre.
Si ce n'est pas le cas, on est dans le cas d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment (voir chapitre Intégration sur un segment).
Si c'est le cas, on pose : $t = \varphi(x)$ avec φ de classe C^1 et strictement monotone sur $]a, b[$. On suppose que φ' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que l'on puisse calculer φ^{-1}.

(i) (Changement de variable)

$$t = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi^{-1}(t)$$

(ii) (Elément différentiel) Comme φ' ne s'annule pas, alors φ^{-1} est dérivable,

$$dt = \varphi'(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad dx = \left(\varphi^{-1}\right)'(t)\,dt$$

(iii) (Nouvelles bornes) Notons

$$\alpha = \lim_{x\to a^+} \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \beta = \lim_{x\to b^-} \varphi(x).$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer)

$$f(x) = f\left(\varphi^{-1}(t)\right)$$

(v) (Conclusion) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\left(\varphi^{-1}(t)\right)\left(\varphi^{-1}\right)'(t)\,dt$ sont de même nature. En cas de convergence,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi^{-1}(t)\right)\left(\varphi^{-1}\right)'(t)\,dt$$

Les changements de variable affines vérifient ces propriétés, on utilisera donc cette méthode pour un changement de variable affine lorsque la nouvelle variable est écrite en fonction de l'ancienne.

Exemple 11. *Déterminer la nature de* $\int_1^e \frac{1}{x\,(1-\ln(x))^2}\,dx$ *avec le changement de variable* $t = 1 - \ln(x)$*.*

Solution.

Méthode 2.5 : *Situation : nouvelle variable en fonction de l'ancienne (cas complexe)*

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$, on commence par déterminer si l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est impropre.
Si ce n'est pas le cas, on est dans le cas d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment (voir chapitre Intégration sur un segment).
Si c'est le cas, on pose : $t = \varphi(x)$ avec φ de classe C^1 et strictement monotone sur $]a, b[$. On suppose que φ' s'annule ou que φ^{-1} ne peut pas être calculée.

(i) (Changement de variable)
$$t = \varphi(x)$$

(ii) (Elément différentiel)
$$dt = \varphi'(x)\,dx$$

(iii) (Nouvelles bornes) Notons
$$\alpha = \lim_{x\to a^+} \varphi(x) \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{x\to b^-} \varphi(x).$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer) On détermine une fonction g définie sur $\varphi\,(]a, b[)$ telle que
$$\forall x \in]a, b[, \quad f(x) = g(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

(v) (Conclusion) $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_\alpha^\beta g(t)\,dt$ sont de même nature. En cas de convergence,
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)\,dt$$

Exemple 12. *Déterminons la nature de* $\int_{-1}^2 \frac{x^5}{8-x^3}\,dx$ *avec le changement de variable* $t = 8 - x^3$*.*
Soit f *définie sur* $[-1, 2[$ *par*
$$f(x) = \frac{x^5}{8-x^3}.$$
La fonction f *est continue sur* $[-1, 2[$ *en tant que quotient bien défini de fonctions continues, l'intégrale est impropre en* 2*. On pose :* $t = 8 - x^3 = \varphi(x)$ *avec* φ *de classe* C^1 *et strictement décroissante de* $[-1, 2[$ *dans* $]0, 9]$*. Dans ce cas,* φ' *s'annule sur* $[-1, 2[$*.*

(i) (Changement de variable)
$$t = 8 - x^3$$

(ii) (Elément différentiel)
$$dt = -3\,x^2\,dx$$

(iii) (Nouvelles bornes)
$$\alpha = \lim_{x\to -1^+} 8 - x^3 = 9 \quad \textit{et} \quad \beta = \lim_{x\to 2^-} 8 - x^3 = 0.$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer)
$$f(x) = \frac{x^5}{8-x^3} = -\frac{1}{3}\,\frac{8-x^3-8}{8-x^3}\,\varphi'(x) = g(\varphi(x))\,\varphi'(x) \quad \textit{en posant } g(t) = -\frac{1}{3}\,\frac{t-8}{t}$$

(v) *(Conclusion)* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x^5}{8-x^3}\,dx$ *et* $\displaystyle -\frac{1}{3}\int_{9}^{0} \frac{t-8}{t}\,dt = \frac{1}{3}\int_{0}^{9}\left(1-\frac{8}{t}\right)dt$ *sont de même nature. D'après le critère de Riemann en* 0*, cette dernière intégrale diverge. On en conclut que* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x^5}{8-x^3}\,dx$ *diverge.*

Remarque 2.6 : *Changements de variable dans les énoncés*

Les changements de variable non affines seront indiqués dans les sujets (DS, DM, concours....).

3 Théorèmes de convergence

Les théorèmes de cette section sont donnés pour des intégrales impropres en b, les théorèmes pour des intégrales impropres en a sont similaires.

De même que pour les critères de comparaison pour les séries, tous les résultats qui suivent pourront se généraliser facilement aux fonctions négatives au voisinage de b.

3.1 Critères de convergence pour des fonctions positives

Théorème 3.1 : *Condition nécessaire et suffisante de convergence*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b[$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \text{la fonction } x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \text{ est majorée sur } [a, b[.$$

Démonstration. On pose $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ pour $x \in [a, b[$. Comme f est continue sur $[a, b[$, g est bien définie sur $[a, b[$. De plus, g est la primitive de f qui s'annule en a, g est dérivable sur $[a, b[$ et pour $x \in [a, b[$,

$$g'(x) = f(x) \geq 0.$$

Ainsi, g est croissante sur $[a, b[$. Le théorème de la limite monotone pour une fonction croissante (voir Chapitre Généralités sur les fonctions réelles) nous permet d'écrire :

$$g \text{ admet une limite finie en } b \quad \Leftrightarrow \quad g \text{ est majorée sur } [a, b[.$$

Ce qui nous donne exactement le résultat souhaité. □

Exemple 13. *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$ *converge.*

Solution.

3.2 Critères de comparaison

On retrouve des théorèmes de comparaison similaires aux théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs.

3.2.1 Critère de comparaison par inégalité

Théorème 3.2 : *Critère de comparaison par inégalité*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$. Supposons qu'au voisinage de b, $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Attention, la convergence ne signifie pas nécessairement que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

Exemple 14. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$.

Solution.

Exemple 15. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,dt$.

Solution.

3.2.2 Critère de comparaison par négligeabilité

Théorème 3.3 : *Critère de comparaison par négligeabilité*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$. Supposons qu'au voisinage de b, f et g sont positives et $f(x) \underset{b}{=} o\left(g(x)\right)$.

- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Exemple 16. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)+2}{t+1}\,dt$.

Solution.

Exemple 17. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}\,dt$.

Solution.

3.2.3 Critère de comparaison par équivalence

Théorème 3.4 : *Critère de comparaison par équivalence*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$. Supposons qu'au voisinage de b, g est positive et $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$, alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Exemple 18. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{t^2+7}{4t^3+1}\,dt$.

Solution.

Exemple 19. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^1 \frac{2t^2+7t^4}{t^3}\,dt$.

Solution.

3.3 Convergence absolue

Définition 3.5 : *Intégrale absolument convergente*

On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ **converge absolument** lorsque $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Propriété 3.6 : *Différence de deux fonctions continues positives*

Toute fonction continue est la différence de deux fonctions continues positives.

Démonstration. Soit f une fonction continue sur $]a, b[$. Pour $x \in]a, b[$, on note

$$f_+(x) = \max\left(f(x), 0\right) \quad \text{et} \quad f_-(x) = \max\left(-f(x), 0\right).$$

Soit $g(x) = \max(x, 0)$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et facilement $g(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 = g(0)$, donc g est continue et positive sur $\mathbb{R}$. On en conclut que par composition f_+ et f_- sont continues et positives sur $]a, b[$. On a pour $x \in]a, b[$,

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

□

Théorème 3.7 : *Convergence d'une intégrale absolument convergente*

Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument, alors elle converge.

Dans ce cas, on a également l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Démonstration. On utilise la décomposition fournie par le résultat précédent : pour $x \in]a, b[$, on note

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{et} \quad f_-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Alors $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$. De plus,

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|.$$

Comme $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ converge, d'après le critère de comparaison par inégalité,

$$\int_a^b f_+(t)\, dt \text{ et } \int_a^b f_-(t)\, dt \text{ convergent.}$$

Ainsi, par linéarité des intégrales convergentes, puisque $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$,

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f_+(t)\, dt - \int_a^b f_-(t)\, dt.$$

On peut donc conclure que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ converge. □

Exemple 20. *Pour $t \geq 1$,*

$$0 \leq \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

D'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge, donc d'après le critère de comparaison par inégalité, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| dt$ converge. On en conclut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$ converge.

4 Intégrale deux fois impropre

4.1 Définition

Définition 4.1 : *Intégrale impropre en a et en b*

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ et $c \in]a, b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **converge** lorsque $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ convergent. Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt.$$

Si l'une des deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ diverge, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **diverge**.

D'après la relation de Chasles, la valeur de c n'a aucune incidence sur la convergence ou la valeur de l'intégrale.

Exemple 21. *Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\, dt$.*

Solution.

4.2 Parité/imparité

Proposition 4.2 : *Fonction paire/impaire*

Si f est paire ou impaire et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et

- si f est paire, alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt,$$
- si f est impaire, alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0.$$

Démonstration. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$. On étudie $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ par changement de variable affine $u = -t$. On obtient :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{-\infty} f(-u)\,(-du) = \int_{-\infty}^{0} f(-u)\,du.$$

- si f est paire, alors
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(u)\,du,$$
- si f est impaire, alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} f(u)\,du.$$

□

Exemple 22. *Cette intégrale définie sur $\mathbb{R}$ sera utile lors de l'étude des variables aléatoires à densité (programme de deuxième année) :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}.$$